ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

Άσκηση 1η **Η εξίσωση κίνησης ενός γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση, έχει την μορφή:**

$$x = \frac{x_0\omega_0}{\omega} e^{-bt/2m} συν(\omega t + \varphi) \quad με \quad εφφ = -b/2m\omega \qquad (1)$$

όπου x_0 η αρχική του απομάκρυνση από την θέση αναφοράς x=0, b η σταθερά απόσβεσής του, m η μάζα του, ω_0 η γωνιακή ιδιοσυχνότητα της ελεύθερης και αμείωτης ταλάντωσής του και ω η γωνιακή ψευδοσυχνότητά του, για την οποία ισχύει:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - (b/2m)^2$$

i) Να δείξετε ότι η στιγμιαία του ταχύτητα δίνεται από την σχέση:

$$v = -\frac{x_0\omega_0^2}{\omega} e^{-bt/2m} ημ\omega t$$

ii) Να δείξετε την σχέση:

$$\int_0^{+\infty} e^{-bt/m} ημ^2\omega t\, dt = \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

<u>ΛΥΣΗ</u>: i) Η στιγμιαία ταχύτητα (αλγεβρική τιμή) του ταλαντωτή είναι κάθε στιγμή η πρώτη παράγωγος της απομάκρυνσής του x, ως προς το χρόνο t, δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$v = \frac{dx}{dt} \overset{(1)}{\Rightarrow} v = \frac{d}{dt}\left[\frac{x_0\omega_0}{\omega} e^{-bt/2m} συν(\omega t + \varphi)\right] \Rightarrow$$

$$v = \frac{x_0\omega_0}{\omega}\left[-\frac{b}{2m} e^{-bt/2m} συν(\omega t + \varphi) - \omega e^{-bt/2m} ημ(\omega t + \varphi)\right] \Rightarrow$$

$$v = -x_0\omega_0 e^{-bt/2m}\left[\frac{b}{2m\omega} συν(\omega t + \varphi) + ημ(\omega t + \varphi)\right]$$

Όμως ισχύει εφφ=-b/2mω, οπότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$v = -x_0\omega_0 e^{-bt/2m}\left[-\varepsilon\varphi\varphi\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) + \eta\mu(\omega t + \varphi)\right] \Rightarrow$$

$$v = -\frac{x_0\omega_0}{\sigma\upsilon\nu\varphi} e^{-bt/2m}\left[-\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) + \sigma\upsilon\nu\varphi\,\eta\mu(\omega t + \varphi)\right] \Rightarrow$$

$$v = -\frac{x_0\omega_0}{\sigma\upsilon\nu\varphi} e^{-bt/2m}\eta\mu\varphi(\omega t + \varphi - \varphi) = -\frac{x_0\omega_0}{\sigma\upsilon\nu\varphi} e^{-bt/2m}\eta\mu\omega t \qquad (2)$$

Ακόμα ισχύει η τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+(b/2m\omega)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+(b/2m)^2}} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

με αποτέλεσμα η σχέση (2) να γράφεται:

$$v = -\frac{x_0\omega_0\omega_0}{\omega} e^{-bt/2m}\eta\mu\omega t \Rightarrow v = -\frac{x_0\omega_0^2}{\omega} e^{-bt/2m}\eta\mu\omega t \qquad (3)$$

ii) Η ισχύς απωλειών $P_{\alpha\pi\omega\lambda}$ του ταλαντωτή είναι κάθε στιγμή ίση με την ισχύ της δύναμης τριβής F=- bv, δηλαδή ισχύει:

$$P_{\alpha\pi\omega\lambda} = Fv = -bv^2 \overset{(3)}{\Rightarrow} P_{\alpha\pi\omega\lambda} = -\frac{bx_0^2\omega_0^4}{\omega^2} e^{-bt/m}\eta\mu^2\omega t \qquad (4)$$

Η απώλεια μηχανικής ενέργειας του ταλαντωτή μεταξύ των χρονικών στιγμών t και t+dt είναι:

$$dW_{\alpha\pi\omega\lambda} = P_{\alpha\pi\omega\lambda}dt \overset{(4)}{\Rightarrow} dW_{\alpha\pi\omega\lambda} = -\frac{bx_0^2\omega_0^4}{\omega^2} e^{-bt/m}\eta\mu^2\omega t\,dt$$

οπότε η συνολική απώλεια $W_{\alpha\pi\omega\lambda}$ μηχανικής ενέργειας θα προκύψει με ολοκλή ρωση της προηγούμενης σχέσεως, όπου τα όρια ολοκλήρωσης είναι το μηδέν και άπειρο, δηλαδή ισχύει:

$$W_{\alpha\pi\omega\lambda} = \int_0^{+\infty} dW_{\alpha\pi\omega\lambda} = \int_0^{+\infty} -\frac{bx_0^2\omega_0^4}{\omega^2} e^{-bt/m}\eta\mu^2\omega t\,dt = -\frac{bx_0^2\omega_0^4}{\omega^2}\int_0^{+\infty} e^{-bt/m}\eta\mu^2\omega t\,dt \qquad (5)$$

Όμως η συνολική απώλεια μηχανικής ενέργειας του ταλαντωτη είναι αντίθετη της μηχανικής του ενέργειας την χρονική στιγμή t=0, δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$W_{\alpha\pi\omega\lambda} = -K(0) - U(0) = -\frac{mv^2(0)}{2} - \frac{Dx^2(0)}{2} \overset{(1),(2)}{\Rightarrow}$$

$$W_{\alpha\pi\omega\lambda} = -0 - \frac{D}{2}\left(\frac{x_0\omega_0}{\omega}\right)^2\sigma\upsilon^2\nu\varphi = -\frac{D}{2}\left(\frac{x_0\omega_0}{\omega}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = -\frac{Dx_0^2}{2} \qquad (6)$$

όπου D η σταθερά επαναφοράς του ταλαντωτή ίση με $m\omega_0^2$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5) και (6) παίρνουμε:

$$\frac{bx_0^2\omega_0^4}{\omega^2}\int_0^{+\infty} e^{-bt/m}\eta\mu^2\omega t\,dt = \frac{Dx_0^2}{2} \quad\Rightarrow\quad b\omega_0^4\int_0^{+\infty} e^{-bt/m}\eta\mu^2\omega t\,dt = \frac{m\omega_0^2\omega^2}{2} \quad\Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-bt/m}\eta\mu^2\omega t\,dt = \frac{m\omega^2}{2b\omega_0^2} = \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2\left(\frac{1}{b/2m}\right) \quad\Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-bt/m}\eta\mu^2\omega t\,dt = \left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)^2\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

P.M. fysikos

Ασκηση 2η

Θεωρούμε τον γραμμικό αρμονικό ταλαντωτή με απόσβεση, του προηγούμενου προβλήματος.

i) Χρησιμοποιώντας την σχέση ταχύτητας-χρόνου του ταλαντωτή, να δείξετε ότι η συνάρτηση v=v(t) παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να βρείτε την σχέση που επιτρέπει να καθοριστούν οι χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν στα ακρότατα αυτά.

ii) Να δείξετε ότι το διάγραμμα της σχέσεως v=f(t) φράσσεται προς τα άνω και προς τα κάτω από δύο περιβάλλουσες, οι οποίες είναι συμ μετρικές μεταξύ τους, ως προς τον άξονα των χρόνων, τα δε σημεία επαφής του διαγράμματος με τις περιβάλλουσες αυτές είναι διαφορε τικά από τα σημεία που αντιστοιχούν στα τοπικά ακρότατα.

iii) Να δείξετε ότι, αν η σταθερά απόσβεσης του ταλαντωτή ικανοπο ιεί την σχέση $b/2m \ll \omega_0$, δηλαδή η ταλάντωση φθίνει πολύ αργά, τοτε τα τοπικά ακρότατα τείνουν να συμπέσουν με τα σημεία επαφής του διαγράμματος της v=f(t) και των περιβαλλουσών της.

ΛΥΣΗ: i) Στο προηγούμενο πρόβλημα αποδείχθηκε ότι, αν η εξίσωση της απο μάκρυνσης ενός γραμμικού αρμονικού ταλαντωτη με απόσβεση έχει την μορφή:

$$x = \frac{x_0\omega_0}{\omega}e^{-bt/2m}\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) \quad \mu\varepsilon \quad \varepsilon\varphi\varphi = b/2m\omega \tag{1}$$

τότε η ταχύτητά του (αλγεβρική τιμή) μεταβάλλεται με τον χρόνο t, σύμφωνα με την σχέση:

$$v = -\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m}\eta\mu\omega t \tag{2}$$

Εάν η συνάρτηση (2) παρουσιάζει τοπικά ακρότατα θα πρέπει να υπάρχουν χρονικές στιγμές που μηδενίζουν την πρώτη παράγωγό της, δηλαδή που ικανο ποιούν την σχέση:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(-\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m}\eta\mu\omega t\right) = 0 \Rightarrow$$

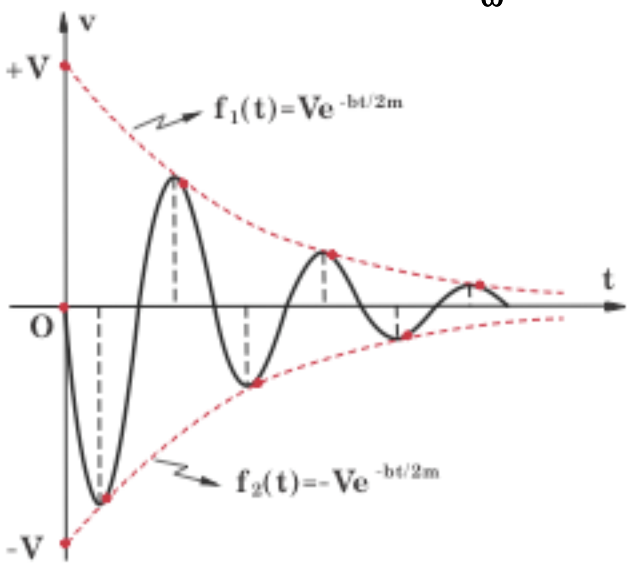
$$-\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}\left(\frac{-b}{2m}e^{-bt/2m}\eta\mu\omega t + \omega e^{-bt/2m}\sigma\upsilon\nu\omega t\right) = 0 \Rightarrow$$

$$-x_0\omega_0^2 e^{-bt/2m}\left(\frac{-b}{2m\omega}\eta\mu\omega t + \sigma\upsilon\nu\omega t\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{-b}{2m\omega}\eta\mu\omega t + \sigma\upsilon\nu\omega t = 0 \Rightarrow -\varepsilon\varphi\varphi\eta\mu\omega t + \sigma\upsilon\nu\omega t = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi}\eta\mu\omega t + \sigma\upsilon\nu\omega t = 0 \Rightarrow -\eta\mu\varphi\eta\mu\omega t + \sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\omega t = 0 \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow \omega t + \varphi = k\pi \Rightarrow t = \frac{k\pi - \varphi}{\omega} \qquad (3)$$



Σχήμα 1

όπου k ακέραιος που δεσμεύεται με την σχέση k>φ/π. Από την όλη ανάλυση προκύπτει ότι υπάρχουν χρονικές στιγμές που η αλγεβρική τιμή της ταχύτη τας του ταλαντωτή παρουσιάζει ακρότατα και μάλιστα αποδεικνύεται ότι τα ακρότατα αυτά είναι εναλλασσόμενα ελάχιστα και μέγιστα (σχήμα 1).

ii) Κατά την εξέλιξη της φθίνουσας ταλάντωσης ισχύει η σχέση:

$$-1 \leq \eta\mu\omega t \leq +1 \Rightarrow -\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m} \leq \frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m}\eta\mu\omega t \leq \frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m} \Rightarrow$$

$$-\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m}\leq -v\leq \frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m}\ \Rightarrow\ -\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m}\leq v\leq \frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m} \qquad (4)$$

Από την (4) γίνεται φανερό ότι η ταχύτητα του ταλαντωτή φράσσεται προς τα άνω από την συνάρτηση:

$$f_1(t)=\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m}=Ve^{-bt/2m} \qquad (5)$$

και προς τα κάτω από την συνάρτηση:

$$f_2(t)=-\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m}=-Ve^{-bt/2m} \qquad (6)$$

με $V=x_0\omega_0^2/\omega>0$. Αυτό σημαίνει ότι οι συναρτήσεις $f_1(t)$ και $f_2(t)$ αποτελούν περιβάλλουσες της ταχύτητας v και μάλιστα τα διαγράμματά τους είναι δύο εκθετικές καμπύλες συμμετρικές μεταξύ τους ως προς τον άξονα των χρόνων (σχήμα 1). Αν θεωρήσουμε τα σημεία επαφής της $f_1(t)$ και της $v=v(t)$, αυτά αντι στοιχούν στις χρονικές στιγμές t_* που ικανοποιούν την σχέση:

$$\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt_*/2m}=\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt_*/2m}\eta\mu\omega t_*\ \Rightarrow\ \eta\mu\omega t_*=1$$

Παραγωγίζοντας εξάλλου την (2) ως προς τον χρόνο t, παίρνουμε:

$$\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m}\eta\mu\omega t\right)=-\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}\left(\frac{-b}{2m}e^{-bt/2m}\eta\mu\omega t+\omega e^{-bt/2m}\sigma\upsilon\nu\omega t\right)\ \Rightarrow$$

$$\frac{dv(t)}{dt}=-\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m}\left(\frac{-b}{2m}\eta\mu\omega t+\omega\sigma\upsilon\nu\omega t\right) \qquad (7)$$

Για $t=t_*$ η (7) δίνει:

$$\frac{dv(t_*)}{dt}=-\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt_*/2m}\left(\frac{-b}{2m}+0\right)=\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}\left(\frac{b}{2m}\right)e^{-bt_*/2m}>0 \qquad (8)$$

Η (8) δηλώνει ότι κατά τις χρονικές στιγμές t_* η ταχύτητα του ταλαντωτη δεν παρουσιάζει ακρότατο, δηλαδή τα ακρότατα της $v=v(t)$ δεν ανήκουν στην περι βάλλουσα $f_1(t)$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι τα ακρότατα της ταχύτη τας δεν ανήκουν στην περιβάλλουσα $f_2(t)$ (σχήμα 1).

iii) Αν δεχθούμε ότι ο συντελεστής απόσβεσης b του ταλαντωτή ικανοποιεί την σχέση $b/2m<<\omega_0$, τότε θα είναι $\omega_0\approx\omega$ και η σχέση (2) παίρνει την προσεγγιστι κή μορφή:

$$v=-\frac{x_0\omega_0^2}{\omega_0}e^{-bt/2m}\eta\mu\omega_0 t=-x_0\omega_0 e^{-bt/2m}\eta\mu\omega_0 t$$

οι δε περιβάλλουσές της θα προσεγγίζονται από τις εκθετικές συναρτήσεις:

$$f_1(t) = x_0\omega_0 e^{-bt/2m} \quad \text{και} \quad f_2(t) = -x_0\omega_0 e^{-bt/2m}$$

που τα διαγράμματά τους είναι οι εστιγμένες καμπύλες του σχήματος (2). Θεωρώντας πάλι τα σημεία επαφής της $f_1(t)$ και της $v=v(t)$, αυτά αντιστοιχούν τις χρονικές στιγμές t_* που ικανοποιούν την σχέση:

$$x_0\omega_0 e^{-bt_*/2m} = x_0\omega_0 e^{-bt_*/2m}\eta\mu\omega t_* \quad \Rightarrow \quad \eta\mu\omega t_* = 1$$

Παραγωγίζοντας την (9) ως προς τον χρόνο t, παίρνουμε:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-x_0\omega_0 e^{-bt/2m}\eta\mu\omega_0 t\right) = -x_0\omega_0\left(\frac{-b}{2m}e^{-bt/2m}\eta\mu\omega_0 t + \omega_0 e^{-bt/2m}\sigma\upsilon\nu\omega_0 t\right)$$

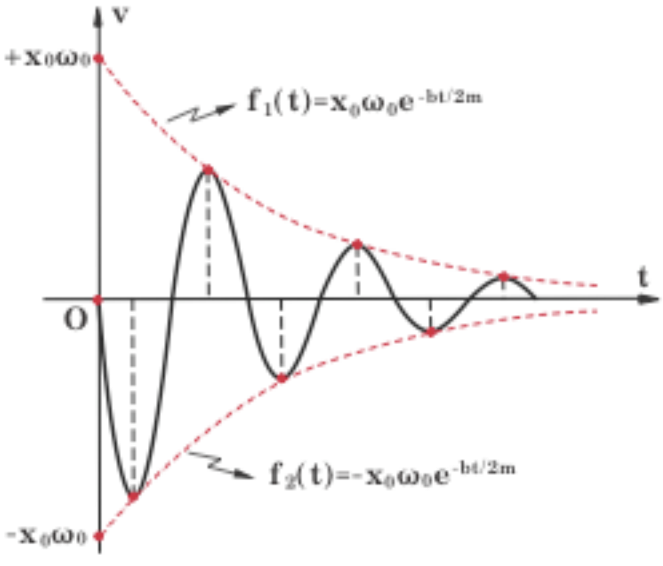
Η πιο πάνω σχέση για $t=t_*$ δίνει:

$$\frac{dv(t_*)}{dt} = -x_0\omega_0 e^{-bt_*/2m}\left(\frac{-b}{2m}+0\right) = x_0\omega_0^2\left(\frac{b}{2m\omega_0}\right)e^{-bt_*/2m} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dv(t_*)}{dt} = x_0\omega_0^2 \varepsilon\varphi\varphi\, e^{-bt_*/2m} \qquad (10)$$

Όμως η γωνία φ ικανοποιεί την σχέση:

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \omega/\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \sigma\upsilon\nu\varphi \approx \omega_0/\omega_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi \approx 0$$



Σχήμα 2

οπότε η (10) δίνει:

$$dv(t_*)/dt \approx 0$$

που σημαίνει ότι τις χρονικές στιγμές t_* η ταχύτητα προσεγγίζει τις ακρότατες τιμές της, δηλαδή τα τοπικά ακρότατα του διαγράμματός της βρίσκονται περί που πάνω στις δύο περιβάλλουσές του (σχήμα 2).

P.M. fysikos

Ασκηση 3η **Ένας γραμμικός αρμονικός ταλαντωτής με απόσβεση εκτρέπεται κατά x_0 από την θέση ισορροπίας του, στην συνέχεια αφήνεται ελεύθερος και τότε εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ω.**

i) Να εκφράσετε την κινητική και την δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή σε συνάρτηση με τον χρόνο και να δείξετε ότι υπάρχουν χρονικές στιγμές που οι ενέργειες αυτές παρουσιάζουν ακρότατα.

ii) Να δείξετε ότι τα διαγράμματα των συναρτήσεων K=K(t) και U=U(t) παρουσιάζουν τις ίδιες περιβάλλουσες.

iii) Εάν η φθίνουσα ταλάντωση είναι βραδεία ($b/2m<<\omega_0$), να δείξετε ότι η ενέργεια απωλειών του ταλαντωτή σε δεδομένο χρόνο είναι ανάλογη του χρόνου αυτού.

<u>ΛΥΣΗ</u>: i) Για τη απομάκρυνση x και την ταχύτητα v του ταλαντωτή ισχύουν οι σχέσεις:

$$x = \frac{x_0\omega_0}{\omega}e^{-bt/2m}\sigma\upsilon\nu(\omega t+\varphi) \quad \mu\varepsilon \quad \sigma\upsilon\nu\varphi = \omega/\omega_0 \qquad (1)$$

και

$$v = -\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}e^{-bt/2m}\eta\mu\omega t \qquad (2)$$

όπου ω_0 η γωνιακή ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή, m η μάζα του και b ο συντελεστής αποσβέσεώς του. Η κινητική ενέργεια K του ταλαντωτή την χρονική στιγμή t δίνεται από την σχέση:

$$K = \frac{mv^2}{2} \overset{(2)}{\Rightarrow} K = \frac{m}{2}\left(\frac{x_0\omega_0^2}{\omega}\right)^2 e^{-bt/m}\eta\mu^2\omega t = \frac{mx_0^2\omega_0^2}{2}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 e^{-bt/m}\eta\mu^2\omega t$$

Όμως η ποσότητα $mx_0^2\omega_0^2/2$ αποτελεί την δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή την χρονική στιγμή t=0 που όμως εκφράζει και την ολική του ενέργεια E_0, αφου την στιγμή αυτή η ταχύτητα του ταλαντωτή είναι μηδενική. Έτσι η προηγούμενη σχέση παίρνει την μορφή:

$$K = E_0\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 e^{-bt/m}\eta\mu^2\omega t \quad \mu\varepsilon \quad 0\leq t<+\infty \qquad (3)$$

Εξάλλου η δυναμική ενέργεια U του ταλαντωτή την χρονική στιγμή t είναι:

$$U=\frac{m\omega_0^2}{2}x^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} U=\frac{m\omega_0^2}{2}\left(\frac{x_0\omega_0}{\omega}\right)^2 e^{-bt/m}\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi) \Rightarrow$$

$$U=\frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 e^{-bt/m}\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi) \Rightarrow$$

$$U=E_0\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 e^{-bt/m}\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi) \quad \mu\varepsilon \quad 0\leq t<+\infty \qquad (4)$$

Σύμφωνα με την σχέση (2) τις χρονικές στιγμές που ισχύει ημωt=0 είναι v=0, που σημαίνει ότι τις στιγμές αυτές η K είναι μηδέν, δηλαδή παίρνει την ελάχι στή τιμή της $K_{min}=0$. Όμως τις ίδιες στιγμές η απομάκρυνση x παρουσιάζει ακρότατα (μεγιστα και ελάχιστα), που σημαίνει ότι η δυναμική ενέργεια U ως ανάλογη του τετραγώνου του x θα παρουσιάζει τοπικά μέγιστα που είναι διαφο ρετικά μεταξύ τους. Εξάλλου, σύμφωνα με την σχέση (1) τις χρονικές στιγμές που ισχύει συν(ωt+φ)=0 είναι x=0, που σημαίνει ότι τις στιγμές αυτές η δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή μηδενίζεται, δηλαδή παίρνει την ελάχιστη τι μή της $U_{min}=0$. Όμως στο προηγούμενο θέμα αποδείχθηκε ότι για συν(ωt+φ)=0 μηδενίζεται η πρώτη παράγωγος της ταχύτητας v, δηλαδή στις αντίστοιχες χρονικές στιγμές η κίνητική ενέργεια K παρουσιάζει τοπικά ακρότατα (μέγιστα και ελάχιστα) και επειδή η K είναι ανάλογή του τετραγώνου της v, θα παίρνει μέγιστες τιμές που είναι διαφορετκές μεταξύ τους.

ii) Κατά την εξέλιξη της φθίνουσας ταλάντωσης ισχύει η σχέση:

$$0\leq \eta\mu^2\omega t\leq 1 \Rightarrow 0\leq E_0\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 e^{-bt/m}\eta\mu^2\omega t\leq E_0\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 e^{-bt/m} \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$0\leq K\leq E_0\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 e^{-bt/m} \qquad (5)$$

Από την (5) γίνεται φανερό ότι η κινητική ενέργεια του ταλαντωτή φράσσεται προς τα άνω από την συνάρτηση:

$$f_1(t)=E_0\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 e^{-bt/m}=E_* e^{-bt/2m} \quad \mu\varepsilon \quad E_*=E_0\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

και προς τα κάτω από την συνάρτηση $\mathbf{f_2(t)=0}$. Ακόμη στην διάρκεια της φθίνου σας ταλάντωσης ισχύει:

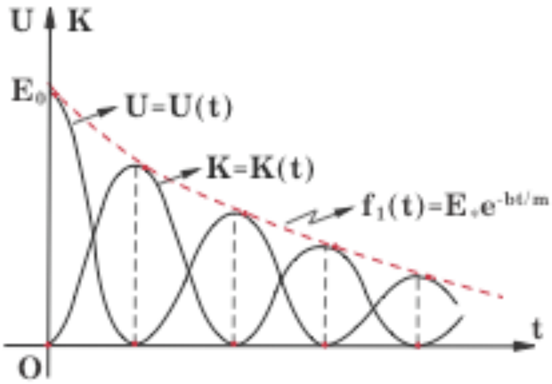
$$0\leq \sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi)\leq 1 \Rightarrow$$

$$0\leq E_0\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 e^{-bt/m}\sigma\upsilon\nu^2(\omega t+\varphi)\leq E_0\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 e^{-bt/m} \overset{(4)}{\Rightarrow}$$

$$0 \leq \mathbf{U} \leq \mathbf{E}_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \mathbf{e}^{-bt/m} \qquad (6)$$

Η (6) δηλώνει ότι η δυναμική ενέργεια του ταλαντωτή φράσσεται προς τα άνω από την συνάρτηση:

$$\mathbf{f_1(t)} = \mathbf{E}_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \mathbf{e}^{-bt/m} = \mathbf{E}_* \mathbf{e}^{-bt/2m} \quad \mathbf{\mu\varepsilon} \quad \mathbf{E}_* = \mathbf{E}_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$



Σχήμα 3

και προς τα κάτω από την συνάρτηση $\mathbf{f_2(t)=0}$. Στο σχήμα (3) φαίνονται τα διαγράμματα των συναρτήσεων K=K(t) και U=U(t), καθώς και οι κοινές περιβάλλουσες των δύο διαγραμμάτων.

iii) Στην περίπτωση που ο συντελεστής αποσβέσεως b του ταλαντωτή ικανοποιεί την σχέση $b/2m \ll \omega_0$, τότε θα είναι $\omega_0 \approx \omega$ και συνφ≈1, δηλαδή φ≈0, οπότε οι σχέσεις (3) και (4) γράφονται:

$$\mathbf{K} \approx \mathbf{E}_0 \mathbf{e}^{-bt/m} \eta\mu^2 \omega t \quad \mathbf{\kappa\alpha\iota} \quad \mathbf{U} \approx \mathbf{E}_0 \mathbf{e}^{-bt/m} \sigma\upsilon\nu^2 \omega t$$

Η ολική ενέργεια E του ταλαντωτή την χρονική στιγμή t είναι:

$$\mathbf{E} = \mathbf{K} + \mathbf{U} \approx \mathbf{E}_0 \mathbf{e}^{-bt/m} \eta\mu^2 \omega t + \mathbf{E}_0 \mathbf{e}^{-bt/m} \sigma\upsilon\nu^2 \omega t \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_0 \mathbf{e}^{-bt/m} (\eta\mu^2 \omega t + \sigma\upsilon\nu^2 \omega t) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} \approx \mathbf{E}_0 \mathbf{e}^{-bt/m} \qquad (7)$$

Η σχέση (7) εφαρμοζόμενη τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2, με $t_2 > t_1$, δίνει τις αντίστοιχες ολικές ενέργειες E_1 και E_2 του ταλαντωτή, δηλαδή θα έχουμε:

$$\mathbf{E}_1 \approx \mathbf{E}_0 \mathbf{e}^{-bt_1/m} \quad \kappa\alpha\iota \quad \mathbf{E}_2 \approx \mathbf{E}_0 \mathbf{e}^{-bt_2/m}$$

Αναπτύσσοντας σε σειρά MacLaurin τους εκθετικούς όρους και παραλείποντας ως αμελητέους τους όρους που περιέχουν τον συντελεστή αποσβέσεως b σε δύναμη μεγαλύτερη ή ίση του δύο, παίρνουμε τις σχέσεις:

$$\mathbf{E}_1 \approx \mathbf{E}_0 \left(1 - \frac{bt_1}{1!} + \frac{b^2 t_1^2}{2!} - \frac{b^3 t_1^3}{3!} + \ldots\right) \approx \mathbf{E}_0 \left(1 - \frac{bt_1}{1!}\right)$$

και

$$E_2 \approx E_0\left(1 - \frac{bt_2}{1!} + \frac{b^2t_2^2}{2!} - \frac{b^3t_3^3}{3!} + \ldots\right) \approx E_0\left(1 - \frac{bt_2}{1!}\right)$$

Η ενέργεια απωλειών ΔΕ του ταλαντωτή σε χρόνο $\Delta t = t_2 - t_1$ είναι:

$$\Delta E = E_1 - E_2 \approx E_0(1 - bt_1) - E_0(1 - bt_2) \quad \Rightarrow$$

$$\Delta E \approx E_0 b(t_2 - t_1) = E_0 b \Delta t$$

δηλαδή στην περίπτωση βραδείας φθίνουσας ταλάντωσης η απώλεια μηχανικής ενέργειας του ταλαντωτη σε ορισμένο χρόνο είναι προσεγγιστικά ανάλογη προς τον χρόνο αυτόν.

P.M. fysikos

Άσκηση 4η

Σφαιρίδιο μάζας m εκτελεί εξαναγκασμένη ταλάντωση πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο κατά μήκος ενός άξονα x'x στερεωμένο στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=m\omega_0^2$, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητο. Το σφαιρίδιο δέχεται δύναμη τριβής $\vec{R}$, της οποίας η αλγεβρική τιμή έχει την μορφή $R=-m\lambda v$, ενώ η δύναμη $\vec{F}$ που εξασκεί ο διεγέρτης έχει φορέα που συμπίπτει με την ευθεία ταλάντωσής του, η δε αλγεβρική της τιμή μεταβάλλεται με τον χρόνο t σύμφωνα με την σχέση:

$$F = F_0 συνωt$$

όπου v η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σφαιριδίου και F_0, λ, ω, ω_0 θετικές και σταθερές ποσότητες.

i) Υποθέτοντας ότι στο μόνιμο στάδιο ταλάντωσης του σφαιριδίου η απομάκρυνσή του από την θέση αναφοράς O μεταβάλλεται με τον χρόνο t, σύμφωνα με τη σχέση:

$$x = Aημωt + Bσυνωt$$

να βρεθούν οι συντελεστές A και B. Τι συμβαίνει για $\omega=\omega_0$;

ii) Να δείξετε ότι η μέση ισχύς απωλειών $\overline{P}_{απωλ}$ της ταλάντωσης δίνεται από την σχέση:

$$\overline{P}_{απωλ} = -\frac{m\lambda\omega^2}{2}\left(A^2 + B^2\right)$$

iii) Να δείξετε ότι κατά την κίνηση του σφαιριδίου ο μέσος ρυθμός προσφοράς ενέργειας σ΄ αυτό, μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$, είναι ίσος με το μέσο ρυθμό της παραγόμενης θερμότητας, λόγω τριβής.

iv) Να δείξετε ότι η μέση ολική ενέργεια $\overline{E}$ του του ταλαντωτή για χρόνο ίσο με την περιοδό του T, δίνεται από την σχέση:

$$\overline{\mathbf{E}}=\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{4}}\left(\mathbf{w}_0^2+\mathbf{w}^2\right)\left(\mathbf{A}^2+\mathbf{B}^2\right)$$

<u>ΛΥΣΗ</u>: i) Εφαρμόζοντας για το σφαιρίδιο τον δευτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα κατά μια στιγμή t που η απομάκρυνση του είναι x (αλγεβρική τιμή) παίρνουμε την σχέση:

$$m\frac{d^2x}{d^2t} = -kx - m\lambda v + F_0\sigma\upsilon\nu\omega t \quad \Rightarrow$$

$$m\frac{d^2x}{d^2t} = -m\omega_0^2 x - m\lambda\frac{dx}{dt} + F_0\sigma\upsilon\nu\omega t \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\sigma\upsilon\nu\omega t \tag{1}$$

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος η διαφορική εξίσωση (1) δέχεται λύση της μορφής:

$$x = A\eta\mu\omega t + B\sigma\upsilon\nu\omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t - B\omega\eta\mu\omega t \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\eta\mu\omega t - B\omega^2\eta\mu\omega t$$

οπότε η (1) γράφεται:

$$-A\omega^2\eta\mu\omega t - B\omega^2\eta\mu\omega t + \lambda(A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t - B\omega\eta\mu\omega t) +$$

$$+ \omega_0^2(A\eta\mu\omega t + B\sigma\upsilon\nu\omega t) = (F_0 / m)\sigma\upsilon\nu\omega t \quad \Rightarrow$$

$$\left(-B\omega^2 + \lambda A\omega - F_0 / m + B\omega_0^2\right)\sigma\upsilon\nu\omega t + \left(-A\omega^2 - \lambda B\omega + A\omega_0^2\right)\eta\mu\omega t = 0 \tag{2}$$

Για να ισχύει η (2) για κάθε t πρέπει:

$$\left.\begin{array}{l} -B\omega^2 + \lambda A\omega - F_0 / m + B\omega_0^2 = 0 \\ -A\omega^2 - \lambda B\omega + A\omega_0^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B(\omega_0^2 - \omega^2) + \lambda A\omega = F_0 / m \\ \lambda B\omega = A(\omega_0^2 - \omega^2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{A}{\lambda\omega}(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \lambda A\omega = \frac{F_0}{m} \quad \Rightarrow \quad A\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \lambda^2\omega^2\right] = \frac{\lambda\omega F_0}{m} \quad \Rightarrow$$

$$A = \frac{\lambda\omega F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \lambda^2\omega^2]}$$

οπότε

$$\mathbf{B} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \lambda^2\omega^2]}$$

Όταν $\omega=\omega_0$, τότε οι παραπάνω σχέσεις δίνουν:

$$\mathbf{A} = \frac{\lambda\omega_0 F_0}{m\lambda^2\omega_0^2} = \frac{\lambda F_0}{m\lambda\omega_0} \quad \text{και} \quad B=0$$

οπότε η εξίσωση της απομακρύνσεως παίρνει την μορφή:

$$x = \frac{\lambda F_0}{m\lambda\omega_0}\,\eta\mu\omega_0 t$$

ii) Η μέση ισχύς απωλειών $\overline{P}_{\alpha\pi\omega\lambda}$ του ταλαντούμενου σφαιριδίου είναι ίση με την μέση ισχύ απωλειών της δύναμης τριβής, δηλαδή ισχύει:

$$\overline{P}_{\alpha\pi\omega\lambda}T = \int_0^T Rv\,dt \;\Rightarrow\; \overline{P}_{\alpha\pi\omega\lambda} = \frac{1}{T}\int_0^T -m\lambda v^2 dt \;\Rightarrow\; \overline{P}_{\alpha\pi\omega\lambda} = \frac{-m\lambda}{T}\int_0^T \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt \;\Rightarrow$$

$$\overline{P}_{\alpha\pi\omega\lambda} = \frac{-m\lambda}{T}\int_0^T \left(A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t - B\omega\eta\mu\omega t\right)^2 dt \;\Rightarrow$$

$$\overline{P}_{\alpha\pi\omega\lambda} = \frac{-m\lambda\omega^2}{T}\int_0^T \left(A^2\sigma\upsilon\nu^2\omega t + B^2\eta\mu^2\omega t - 2AB\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\omega t\right)^2 dt \;\Rightarrow$$

$$\overline{P}_{\alpha\pi\omega\lambda} = \frac{-m\lambda\omega^2}{T}\left[A^2\int_0^T dt + (B^2 - A^2)\int_0^T \eta\mu^2\omega t\,dt - AB\int_0^T \eta\mu 2\omega t\,dt\right] \;\Rightarrow$$

$$\overline{P}_{\alpha\pi\omega\lambda} = \frac{-m\lambda\omega^2}{T}\left[A^2T + \frac{(B^2 - A^2)}{2}\int_0^T (1 - \sigma\upsilon\nu 2\omega t\,dt - AB\int_0^T \eta\mu 2\omega t\,dt\right] \;\Rightarrow$$

$$\overline{P}_{\alpha\pi\omega\lambda} = \frac{-m\lambda\omega^2}{T}\left[A^2T + \frac{(B^2 - A^2)T}{2}\right] \;\Rightarrow\; \overline{P}_{\alpha\pi\omega\lambda} = \frac{-m\lambda\omega^2}{2}(A^2 + B^2) \qquad (3)$$

iii) Ο μέσος ρυθμός προσφοράς ενέργειας στο σφαιρίδιο, μέσω του έργου της δύναμης $\vec{F}$ είναι ουσιαστικά η μέση ισχύς της $\vec{F}$, για την οποία ισχύει:

$$\overline{P}_{\vec{F}}T = \int_0^T Fv\,dt \;\Rightarrow\; \overline{P}_{\vec{F}} = \frac{1}{T}\int_0^T F_0\sigma\upsilon\nu\omega t(A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t - B\omega\eta\mu\omega t)dt \;\Rightarrow$$

$$\overline{P}_{\vec{F}} = \frac{F_0}{T}\left[A\int_0^T \sigma\upsilon\nu^2\omega t\,dt - B\omega\int_0^T \eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\omega t\,dt\right] \;\Rightarrow$$

$$\overline{P}_{\vec{F}} = \frac{F_0\omega}{T}\left[\frac{A}{2}\int_0^T(1+\sigma\upsilon\nu 2\omega t)dt - \frac{B}{2}\int_0^T \eta\mu 2\omega t dt\right] \Rightarrow$$

$$\overline{P}_{\vec{F}} = \frac{F_0\omega}{T}\left(\frac{AT}{2}\right) = \frac{F_0\omega A}{2} \qquad (4)$$

Εξάλλου ο μέσος ρυθμός $\overline{q}$ της εκλυόμενης θερμότητας, λόγω τριβής, είναι ίσος με την απόλυτη τιμή της μέσης ισχύος απωλειών, δηλαδή ισχύει:

$$\overline{q} = |\overline{P}_{\alpha\pi\omega\lambda}| \overset{(3)}{\Rightarrow} \overline{q} = \frac{m\lambda\omega^2}{2}(A^2 + B^2) \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας στην (5) τις τιμές των A και B του πρώτου ερωτήματος, παίρ νουμε:

$$\overline{q} = \frac{m\lambda\omega^2}{2}\frac{\lambda^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \lambda^2\omega^2]^2}\left(\frac{F_0^2}{m^2}\right) \Rightarrow$$

$$\overline{q} = \frac{F_0\omega}{2}\frac{\lambda\omega F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \lambda^2\omega^2]} = \frac{F_0\omega A}{2} \qquad (6)$$

Από τις (4) και (5) προκύπτει $\overline{q} = \overline{P}_{\vec{F}}$.

iv) Η μέση ολική ενέργεια $\overline{E}$ του σφαιριδίου για χρόνο μιας περιόδου T της εξαναγκασμένης ταλάντωσής του είναι ίση με το άθροισμα της αντίστοιχης μέσης κινητικής του ενέργειας $\overline{K}$ και της αντίστοιχης μέσης δυναμικής του ενέργειας $\overline{U}$, δηλαδή ισχύει:

$$\overline{E} = \overline{K} + \overline{U} \qquad (7)$$

Για την $\overline{K}$ ισχύει:

$$\overline{K}T = \int_0^T (mv^2/2)dt \Rightarrow \overline{K} = \frac{m}{2T}\int_0^T(A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t - B\omega\eta\mu\omega t)^2 dt \Rightarrow$$

$$\overline{K} = \frac{m\omega^2}{2T}\int_0^T(A^2\sigma\upsilon\nu^2\omega t + B^2\eta\mu^2\omega t - 2AB\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\omega)dt \Rightarrow$$

$$\overline{K} = \frac{m\omega^2}{2T}\left[\frac{A^2}{2}\int_0^T(1+\sigma\upsilon\nu 2\omega t)dt + \frac{B^2}{2}\int_0^T(1-\sigma\upsilon\nu 2\omega t)dt - AB\int_0^T\eta\mu 2\omega t dt\right] \Rightarrow$$

$$\overline{K} = \frac{m\omega^2}{2T}\left(\frac{A^2T}{2} + \frac{B^2T}{2}\right) = \frac{m\omega^2}{4}\left(A^2 + B^2\right) \qquad (8)$$

Για την $\overline{\mathbf{K}}$ ισχύει:

$$\overline{\mathbf{U}}\mathbf{T} = \int_0^T (m\omega_0^2 x^2/2)dt \;\Rightarrow\; \overline{\mathbf{U}} = \frac{m\omega_0^2}{2T}\int_0^T (A\eta\mu\omega t + B\sigma\upsilon\nu\omega t)^2 dt \;\Rightarrow$$

$$\overline{\mathbf{K}} = \frac{m\omega^2}{2T}\int_0^T (A^2\eta\mu^2\omega t + B^2\sigma\upsilon\nu^2\omega t + 2AB\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\omega)dt \;\Rightarrow$$

$$\overline{\mathbf{U}} = \frac{m\omega_0^2}{2T}\left[\frac{A^2}{2}\int_0^T (1\text{-}\sigma\upsilon\nu 2\omega t)dt + \frac{B^2}{2}\int_0^T (1+\sigma\upsilon\nu 2\omega t)dt + AB\int_0^T \eta\mu 2\omega t dt\right] \;\Rightarrow$$

$$\overline{\mathbf{U}} = \frac{m\omega_0^2}{2T}\left(\frac{A^2T}{2} + \frac{B^2T}{2}\right) = \frac{m\omega_0^2}{4}\left(A^2 + B^2\right) \qquad (9)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7), (8) και (9) παίρνουμε:

$$\overline{\mathbf{E}} = \frac{m\omega^2}{4}\left(A^2 + B^2\right) + \frac{m\omega_0^2}{4}\left(A^2 + B^2\right) \;\Rightarrow$$

$$\overline{\mathbf{E}} = \frac{m}{4}\left(\omega^2 + \omega_0^2\right)\left(A^2 + B^2\right) \qquad (10)$$

Όταν $\omega=\omega_0$, τότε $A=F_0/m\lambda\omega_0$ και $B=0$, οπότε η (10) γράφεται:

$$\overline{\mathbf{E}} = \frac{m}{4}\left(2\omega_0^2\right)\left(\frac{F_0}{m\lambda\omega_0}\right)^2 = \frac{F_0^2}{2m\lambda^2}$$

P.M. fysikos

Ασκηση 5η

Ένας αρμονικός ταλαντωτής εκτελεί αμείωτη εξα ναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση εξωτερικής περιοδικής δύναμης, η οποία έχει την μορφή:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_0}\eta\mu\omega t$$

όπου F_0, ω θετικές και σταθερές ποσότητες

i) Να εκφράσετε την μέση ισχύ $\overline{P}$ της δύναμης αυτής, σε συνάρτηση με την γωνιακή της συχνότητα ω καί να σχεδιάσετε με ελεύθερη εκτί μηση την γραφική παράσταση της σχέσεως που θα βρείτε.

ii) Εάν ω_1 είναι η τιμή της ω που καθιστά το πλάτος της εξαναγκασ μένης ταλάντωσης μέγιστο καί ω_2 η τιμή της ω γιά την οποία η $\overline{P}$ γί νεται μέγιστη, να δείξετε τη σχέση:

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = b^2/2m$$

όπου m η μάζα του αρμονικού ταλαντωτή καί b η σταθερά απόσβέ σεώς του.

iii) Εάν Δω είναι το εύρος των τιμών της ω που ικανοποιούν τη σχέ ση $\overline{P} \geq \overline{P}_{max}/2$, να δείξετε ότι:

$$\Delta\omega = b/m$$

<u>ΛΥΣΗ</u>: i) Η εξίσωση της απόμάκρυνσης x του αρμονικού ταλαντωτή έχει την μορφή:

$$x = x_0\eta\mu(\omega t + \varphi) \tag{1}$$

$$\mu\varepsilon \quad x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} \quad \kappa\alpha\iota \quad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

όπου ω_0 η κυκλική ιδιοσυχνότητα της ελεύθερης και αμείωτης ταλάντωσης του ταλαντωτή. Παραγωγίζοντας την (1) ως πρός το χρόνο t παίρνουμε την εξίσω ση της ταχύτητας v του αρμονικού ταλαντωτή, οπότε θα έχουμε:

$$v = \frac{dx}{dt} = x_0\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) = v_0\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

$$\mu\varepsilon \quad v_0 = \frac{F_0\omega}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega^2}} = \frac{F_0\omega}{Z} \tag{3}$$

όπου $Z=\sqrt{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+b^2\omega^2}$. Η μέση ισχύς $\overline{P}$ της εξωτερικής περιοδικής δύνα μης, γιά χρόνο ίσο πρός την περίοδο T της αμείωτης εξαναγκασμένης ταλάντω σης του αρμονικού ταλαντωτή, υπολογίζεται μέσω της σχέσεως:

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T (Pdt) = \frac{1}{T}\int_0^T (Fvdt) = \frac{1}{T}\int_0^T F_0\eta\mu\omega t\, v_0\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi)dt \quad \Rightarrow$$

$$\overline{P} = \frac{F_0 v_0}{T}\int_0^T \eta\mu\omega t\,(\sigma\upsilon\nu\omega t\sigma\upsilon\nu\varphi + \eta\mu\omega t\eta\mu\varphi)dt \quad \Rightarrow$$

$$\overline{P} = \frac{F_0 v_0\sigma\upsilon\nu\varphi}{T}\int_0^T (\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\omega t dt) + \frac{F_0 v_0\eta\mu\varphi}{T}\int_0^T (\eta\mu^2\omega t dt) \quad \Rightarrow$$

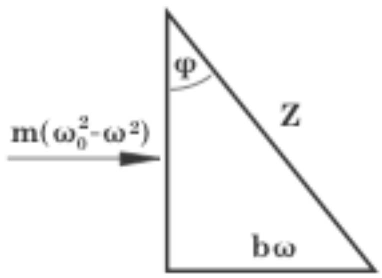
$$\overline{P} = \frac{F_0 v_0\sigma\upsilon\nu\varphi}{2T}\int_0^T (\eta\mu 2\omega t dt) + \frac{F_0 v_0\eta\mu\varphi}{2T}\int_0^T (1 - \sigma\upsilon\nu 2\omega t dt) \quad \Rightarrow$$

$$\overline{P} = \frac{F_0 v_0 συνφ}{2T} 0 + \frac{F_0 v_0 ημφ}{2T} T = \frac{F_0 v_0 ημφ}{2} \qquad (4)$$

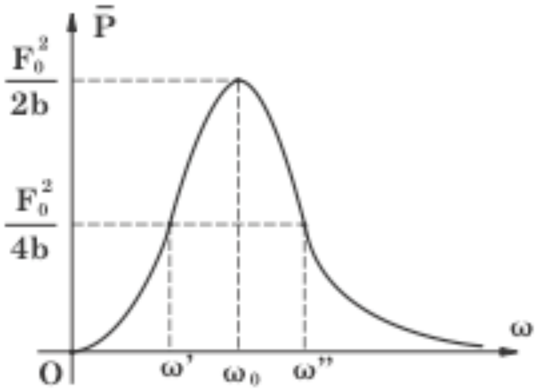
Γιά τον υπολογισμό του ημφ θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος (4), του οποίου οι δύο κάθετες πλευρές έχουν μήκη $m(\omega_0^2-\omega^2)$ καί $b\omega$, οπότε το μήκος της υποτείνουσας του θα είναι ίσο με Z, ενώ η οξεία γωνία που βρίσκε ται απέναντι από την πλευρά $b\omega$ θα είναι ίση με φ, αφού για την γωνία αυτή ισχύει $εφφ=b\omega/\omega_0^2-\omega^2$. Από το βοηθητικό αυτό τρίγωνο παίρνουμε $ημφ= b\omega/Z$, οπότε η σχέση (4) γράφεται:

$$\overline{P} = \frac{F_0 v_0 b\omega}{2Z} \overset{(3)}{\Rightarrow} \overline{P} = \frac{F_0}{2Z}\frac{F_0\omega}{Z} b\omega = \frac{F_0^2\omega^2 b}{2Z^2} \Rightarrow$$

$$\overline{P} = \frac{F_0^2 b}{2}\frac{\omega^2}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + b^2\omega^2} \Rightarrow \overline{P} = \frac{F_0^2 b/2}{[m(\omega_0^2-\omega^2)/\omega]^2 + b^2} \qquad (5)$$



Σχήμα 4



Σχήμα 5

Από την (5) παρατηρούμε ότι, η μέση ισχύς $\overline{P}$ γίνεται μέγιστη όταν η ποσό τητα $[m(\omega_0^2-\omega^2)/\omega]^2+b^2$ γίνει ελάχιστη, δηλαδή όταν:

$$[m(\omega_0^2-\omega^2)/\omega]^2 = 0$$

οπότε θα έχουμε:

$$\overline{P}_{max} = \frac{F_0^2 b}{2b^2} = \frac{F_0^2}{2b} \qquad (6)$$

Αυτό συμβαίνει όταν η κυκλική συχνότητα ω του διεγέρτη είναι ίση με ω_0. Εξάλλου, από τη σχέση (5) προκύπτουν τα εξής:

Γιά $\omega \to 0$ έχουμε $\overline{P} \to 0$

Γιά $\omega = \omega_0$ έχουμε $\overline{P} = F_0^2/2b = max$

Γιά $\omega \to +\infty$ έχουμε $\overline{P} \to 0$

Η γραφική λοιπόν παράσταση της συνάρτησης $\overline{P}$=f(ω) έχει την μορφή του σχή ματος (5).

ii) Προηγούμενα δείξαμε ότι, η $\overline{\mathbf{P}}$ γίνεται μέγιστη όταν $\omega=\omega_0$, οπότε η κυκλι κή συχνότητα ω_2 είναι ίση με ω_0. Εξάλλου η τιμή της ω γιά την οποία το πλά τος x_0 της εξαναγκασμένης ταλάντωσης του ταλαντωτή γίνεται μέγιστο είναι:

$$\boldsymbol{\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2/2m^2} \Rightarrow \omega_2^2 = \omega_0^2 - b^2/2m^2 \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\omega_2^2 = \omega_1^2 - b^2/2m^2 \Rightarrow \omega_1^2 - \omega_2^2 = b^2/2m^2} \qquad (7)$$

iii) Ας αναζητήσουμε τώρα τις τιμές της ω γιά τις οποίες ισχύει η σχέση:

$$\boldsymbol{\overline{P} = \frac{\overline{P}_{max}}{2} \overset{(5)}{\underset{(6)}{\Rightarrow}} \frac{F_0^2 b/2}{[m(\omega_0^2 - \omega^2)/\omega]^2 + b^2} = \frac{F_0^2}{4b} \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{2\omega^2 b^2 = m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 b^2 \Rightarrow m(\omega_0^2 - \omega^2) = \pm \omega b \Rightarrow}$$

$$\boldsymbol{\omega^2 - \omega_0^2 = \pm \omega b/m \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \omega^2 + b\omega/m - \omega_0^2 = 0 \\ \omega^2 - b\omega/m - \omega_0^2 = 0 \end{array}\right\}}$$

Οι δύο αυτές δευτεροβάθμιες ως πρός ω εξισώσεις έχουν την ίδια διακρίνουσα $\Delta = (b/2m)^2 + 4\omega_0^2$ οι δε θετικές τους ρίζες είναι:

$$\boldsymbol{\left.\begin{array}{l} \omega' = - b/2m + \sqrt{\Delta}/2 \\ \omega'' = b/2m + \sqrt{\Delta}/2 \end{array}\right\}} \qquad (8)$$

Το εύρος Δω των τιμών της ω, που ικανοποιούν τη σχέση $\overline{P} \geq \overline{P}_{max}/2$ είναι:

$$\boldsymbol{\Delta\omega = \omega'' - \omega' \overset{(8)}{\Rightarrow} \Delta\omega = b/2m + b/2m = b/m}$$

P.M. fysikos

Ασκηση 6η

Μικρό σώμα μάζας m, βρίσκεται πάνω σε λείο ορι ζόντιο επίπεδο και έχει στερεωθεί στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, του οποίου το άλλο άκρο είναι ακλόνητο, όπως φαίνεται στο σχήμα (6). Τη στιγμή t=0 το σώμα είναι ακίνητο στη θέση ισορ ροπίας του και ασκείται σ' αυτό σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}_0$ επί χρό νο τ. Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης του σώματος.

<u>ΛΥΣΗ:</u> Διακρίνουμε δύο στάδια κίνησης του σώματος. Κατά το πρώτο στάδιο $(0 \leq t \leq \tau)$ το σώμα δέχεται το βάρος του $\vec{w}$, που εξουδετερώνεται από την κατα κόρυφη αντίδραση $\vec{A}$ του λείου οριζόντιου επίπεδου, την δύναμη $\vec{F}_{\varepsilon\lambda}$ από το ελαστικά παραμορφωμένο ελατήριο και την οριζόντια σταθερή δύναμη $\vec{F}_0$.

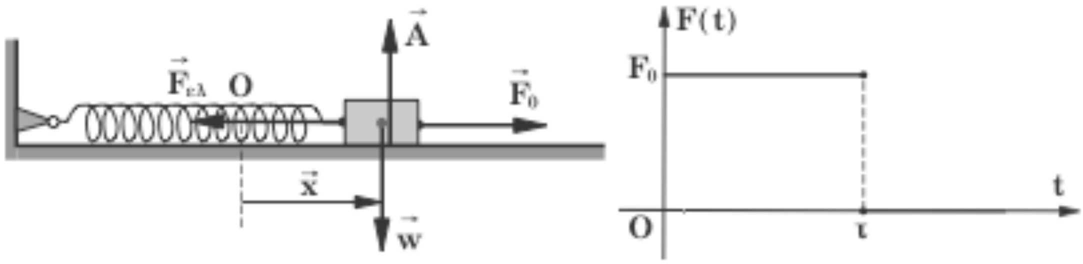
Εφαρμόζοντας για το σώμα τον δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα κατά την χρονική στιγμή t που η απομάκρυνσή του είναι $\vec{\mathbf{x}}$, παίρνουμε την σχέση:

$$\mathbf{m}\frac{\mathbf{d^2x}}{\mathbf{dt^2}} = -\mathbf{kx} + \mathbf{F_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathbf{d^2x}}{\mathbf{dt^2}} + \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{F_0}}{\mathbf{m}} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathbf{d^2x}}{\mathbf{dt^2}} + \boldsymbol{\omega}^2\mathbf{x} = \frac{\mathbf{F_0}}{\mathbf{m}} \quad \text{με} \quad \boldsymbol{\omega}^2 = \mathbf{k/m} \qquad (1)$$

Η (1) είναι μια μη ομογενής διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές και δέχεται μερική λύση της μορφής $x_1=F_0/k$. Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης έχει την μορφή:

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{A}\eta\mu(\boldsymbol{\omega}\mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi}) \qquad (2)$$



Σχήμα 6

όπου Α, φ σταθερές ποσότητες που θα καθορισθούν από τις αρχικές συνθήκες κίνησης του σώματος. Η γενική λύση της (1) είναι το άθροισμα x_1+x_2, δηλαδή ισχύει:

$$\mathbf{x(t)} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} = \mathbf{A}\eta\mu(\boldsymbol{\omega}\mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi}) + \mathbf{F_0/k} \qquad (3)$$

Παραγωγίζοντας την (3) παίρνουμε:

$$\mathbf{dx/dt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\omega}\sigma\upsilon\nu(\boldsymbol{\omega}\mathbf{t} + \boldsymbol{\varphi}) \qquad (4)$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις (3) και (4) την χρονική στιγμή t=0 παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A\eta\mu\varphi + F/k \\ 0 = A\omega\sigma\upsilon\nu\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = -F/k\eta\mu\varphi \\ \sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = -F/k \\ \varphi = \pi/2 \end{array}\right\}$$

Άρα η τελική μορφή της εξίσωσης κίνησης του σώματος είναι:

$$\mathbf{x(t)} = -\frac{\mathbf{F_0}}{\mathbf{k}}\eta\mu\left(\boldsymbol{\omega}\mathbf{t} + \frac{\pi}{\mathbf{2}}\right) + \frac{\mathbf{F_0}}{\mathbf{k}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x(t)} = \frac{\mathbf{F_0}}{\mathbf{k}}(\mathbf{1} - \sigma\upsilon\nu\boldsymbol{\omega}\mathbf{t}) \qquad (5)$$

Κατά το δεύτερο στάδιο κίνησης του σώματος ($t \geq \tau$) η δύναμη $\vec{\mathbf{F}}_0$ παύει να ενεργεί σ' αυτό, οπότε η διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνησή του έχει την μορφή:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (6)$$

Για τη λύση της (6) πραγματοποιούμε αλλαγή της μεταβλητής t, μέσω του μετασχηματισμού t'=t-τ, οπότε θα έχουμε t' ≥0 και dt=dt' με αποτέλεσμα η (6) να γράφεται:

$$\frac{d^2x}{dt'^2} + \omega^2 x = 0 \qquad (7)$$

Η (7) δέχεται λύση της μορφής:

$$x(t') = A'\,\eta\mu(\omega t' + \varphi') \qquad (8)$$

η οποία με παραγώγιση ως προς t' δίνει:

$$dx/dt' = A'\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t' + \varphi') \qquad (9)$$

Οι σταθερές A', φ' θα προκύψουν από τις συνθήκες κίνησης του σώματος κατά τη χρονική στιγμή t=τ, οπότε τη στιγμή θα έχουμε t'=0 καθώς και τις οριακές συνθήκες:

$$\left.\begin{aligned} x(t'{=}0) &= A'\eta\mu\varphi' \\ (dx/dt')_{t'=0} &= A'\omega\sigma\upsilon\nu\varphi' \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Όμως ισχύουν ακόμη οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} x(t'{=}0) &= x(t{=}\tau) = (F_0/k)(1 - \sigma\upsilon\nu\omega\tau) \\ (dx/dt')_{t'=0} &= (dx/dt)_{t=\tau} = (F_0/k)\omega\eta\mu\omega\tau \end{aligned}\right\} \overset{(10)}{\Rightarrow}$$

$$\left.\begin{aligned} A'\eta\mu\varphi' &= (F_0/k)(1 - \sigma\upsilon\nu\omega\tau) \\ A'\omega\sigma\upsilon\nu\varphi' &= (F_0/k)\omega\eta\mu\omega\tau \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \eta\mu\varphi'\eta\mu\omega\tau = \sigma\upsilon\nu\varphi' - \sigma\upsilon\nu\varphi'\sigma\upsilon\nu\omega\tau \quad \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi'\eta\mu\omega\tau + \sigma\upsilon\nu\varphi'\sigma\upsilon\nu\omega\tau = \sigma\upsilon\nu\varphi' \quad \Rightarrow \quad \sigma\upsilon\nu(\omega\tau - \varphi') = \sigma\upsilon\nu\varphi' \quad \Rightarrow$$

$$\omega\tau - \varphi' = \varphi' \quad \Rightarrow \quad \varphi' = \omega\tau/2$$

Άρα για την σταθερά A' θα έχουμε:

$$A'\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\eta\mu\varphi' = \frac{F_0}{k}\eta\mu\omega\tau \;\Rightarrow\; A'\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \frac{2F_0}{k}\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \;\Rightarrow$$

$$A' = \frac{2F_0}{k}\eta\mu\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Έτσι η σχέση (8) γράφεται:

$$x(t') = \frac{2F_0}{k}\,\etaμ\left(\frac{ωτ}{2}\right)\etaμ\left(ωt' + \frac{ωτ}{2}\right) = \frac{2F_0}{k}\,\etaμ\left(\frac{ωτ}{2}\right)\etaμω\left(t' + \frac{τ}{2}\right) \Rightarrow$$

$$x(t) = \frac{2F_0}{k}\,\etaμ\left(\frac{ωτ}{2}\right)\etaμω\left(t - τ + \frac{τ}{2}\right) = \frac{2F_0}{k}\,\etaμ\left(\frac{ωτ}{2}\right)\etaμω\left(t - \frac{τ}{2}\right)$$

Η ζητούμενη επομένως εξίσωση κίνησης του σώματος έχει την μορφή:

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{2F_0}{k}\,\etaμ^2\left(\dfrac{ωt}{2}\right) & ,\ 0 \leq t \leq τ \\ \dfrac{2F_0}{k}\,\etaμ\left(\dfrac{ωτ}{2}\right)\etaμω\left(t - \dfrac{τ}{2}\right) & ,\ t \geq τ \end{cases}$$

Άσκηση 7η

Δύο μικρά σφαιρίδια $Σ_1$ και $Σ_2$ με αντίστοιχες μάζες m_1 και m_2 συνδέονται μεταξύ τους με ιδανικό ελατήριο, σταθεράς k και φυσικού μήκους L. Αρχικώς το σύστημα κρατείται ακίνητο, ώστε το ελατήριο να είναι κατακόρυφο και το σφαιρίδιο $Σ_2$ να αιωρείται, κάποια δε στιγμή που λαμβάνεται ως αρχή μέτρησης του χρόνου αφήνουμε ελεύθερο το σφαιρίδιο $Σ_1$.

i) Να μελετηθεί η κίνηση κάθε σφαιριδίου στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας του, καθώς και στο σύστημα αναφοράς του εδάφους.

ii) Να εκφράσετε σε συνάρτηση με τον χρόνο την απόσταση των δύο σφαιριδίων. Δίνεται η επιτάχυνση $\vec{g}$ της βαρύτητας.

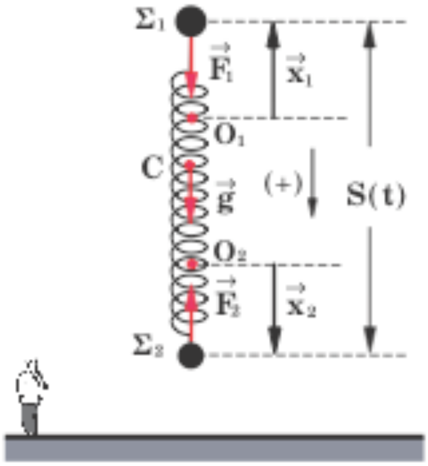
<u>**ΛΥΣΗ**</u>**: i)** Το κέντρο μάζας C του συστήματος των δύο σφαιριδίων κινείται ως προς το ακίνητο έδαφος με επιτάχυνση $\vec{g}$, που σημαίνει ότι το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας είναι ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Τα δύο σφαιρίδια εξεταζόμενα από το σύστημα αυτό βρίσκονται σε κατάσταση έλλειψης βαρύτητας, διότι τα βάρη τους εξουδετερώνονται από τις αντίστοιχες αδρανειακές δυνάμεις $-m_1\vec{g}$ και $-m_2\vec{g}$, που σημαίνει ότι οι δυνάμεις που επηρεάζουν την κίνηση των δύο σφαιριδίων στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι οι ελαστικές δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ από το ελατήριο. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι δυνάμεις αυτές εξασκούνται στα σφαιρίδια από δύο αυτοτελή ελατήρια που έχουν κοινό άκρο το **"ακίνητο"** κέντρο μάζας C, οι δε σταθερές τους k_1 και k_2 είναι αντίστροφα ανάλογες προς τα φυσικά τους μήκη L_1 και L_2, δηλαδή ισχύει:

$$k_1/k_2 = L_2 / L_1 \qquad (1)$$

Όμως από βασική ιδιότητα του κέντρου μάζας τα μήκη L_1 και L_2 ικανοποιούν και την σχέση $m_1L_1=m_2L_2$, οπότε η (1) δίνει:

$$k_1/k_2 = m_1/m_2 \qquad (2)$$

Την στιγμή που το σύστημα αφήνεται ελεύθερο το ελατήριο είναι τεντωμένο με αποτέλεσμα τα σφαιρίδια Σ_1 και Σ_2 να εκτελούν στο σύστημα αναφοράς του



Σχήμα 7

κέντρου μάζας αρμονική ταλαντωση με αντίστοιχες γωνιακές συχνότητες ω_1, ω_2 για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned}\omega_1^2 &= k_1/m_1\\ \omega_2^2 &= k_2/m_2\end{aligned}\right\} \overset{(:)}{\Rightarrow} \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{m_2}{m_1}\frac{k_1}{k_2} \overset{(2)}{\Rightarrow} \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{m_2}{m_1}\frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \omega_1 = \omega_2$$

Ακόμη έχουμε:

$$k_1L_1 = kL \Rightarrow k_1 = k\frac{L}{L_1} = k\frac{L_1+L_2}{L_1} = k\left(1+\frac{L_2}{L_1}\right) \overset{(1),(2)}{\Rightarrow}$$

$$k_1 = k\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) \Rightarrow \frac{k_1}{m_1} = \frac{k}{m_1}\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{k}{m_1}\left(\frac{m_1+m_2}{m_2}\right) \Rightarrow$$

$$\omega_1^2 = k\left(\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\right)$$

Η κοινή επομένως κυκλική ιδιοσύχνότητα ταλάντωσης των δύο σφαιριδίων στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας είναι:

$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_1+m_2)}{m_1m_2}} \qquad (3)$$

Αν $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ είναι οι απομακρύνσεις των σφαιριδίων Σ_1, Σ_2 ως προς τις αντίστοι χες θέσεις ισορροπίας τους O_1 και O_2, ύστερα από χρόνο t αφότου το σύστημα αφέθηκε ελευθερο, θα ισχύει για τις αλγεβρικές τους τιμές οι σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= A_1\eta\mu(\omega t+\varphi_1)\\ x_2 &= A_2\eta\mu(\omega t+\varphi_2)\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

όπου A_1, A_2 φ_1, φ_2 σταθερές που θα προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες κίνησης των δύο σφαιριδίων. Εξάλλου οι αλγεβρικές τιμές των ταχυτήτων $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ των σφαιριδίων δίνονται από τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= A_1\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_1) \\ v_2 &= A_2\omega\sigma\upsilon\nu(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις () την στιγμή t=0 παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A_1\omega\sigma\upsilon\nu\varphi_1 \\ 0 &= A_2\omega\sigma\upsilon\nu\varphi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \sigma\upsilon\nu\varphi_1 &= 0 \\ \sigma\upsilon\nu\varphi_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \pi/2 \\ \varphi_2 &= \pi/2 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Εξάλλου οι σχέσεις (4) για t=0 δίνουν:

$$\left.\begin{aligned} -x_{1,0} &= A_1\eta\mu\varphi_1 \\ x_{2,0} &= A_2\eta\mu\varphi_2 \end{aligned}\right\} \overset{(6)}{\Rightarrow} \left.\begin{aligned} A_1 &= -x_{1,0}/\eta\mu(\pi/2) = -x_{1,0} \\ A_2 &= x_{2,0}/\eta\mu(\pi/2) = x_{2,0} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

όπου $x_{1,0}$ και $x_{2,0}$ οι αποστάσεις των σφαιριδίων Σ_1 και Σ_2 αντιστοίχως από τις θέσεις ισορροπιας τους O_1 και O_2 στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας τους, Με βάση τις (6) και (7) οι σχέσεις (6) γράφονται:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -x_{1,0}\eta\mu(\omega t + \pi/2) \\ x_2 &= x_{2,0}\eta\mu(\omega t + \pi/2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= -x_{1,0}\sigma\upsilon\nu\omega t \\ x_2 &= x_{2,0}\sigma\upsilon\nu\omega t \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Εξάλλου οι αλγεβρικές τιμές των απομακρύνσεων $\vec{x}'_1$ και $\vec{x}'_2$ των σφαιριδίων θεωρουμένων με αρχή το κέντρο μάζας C, δίνονται από τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= -L_1 + x_1 \\ x'_2 &= L_2 + x_2 \end{aligned}\right\} \overset{(8)}{\Rightarrow} \left.\begin{aligned} x'_1 &= -L_1 - x_{1,0}\sigma\upsilon\nu\omega t \\ x'_2 &= L_2 + x_{2,0}\sigma\upsilon\nu\omega t \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Υπολογισμός των $x_{1,0}$ και $x_{2,0}$

Για τα μήκη L_1 και L_2 ισχύουν οι σχέσεις:

$$L_1 = \frac{m_2 L}{m_1 + m_2} \quad \text{και} \quad L_2 = \frac{m_1 L}{m_1 + m_2} \tag{10}$$

Επειδή την χρονική στιγμή t=0 το ελατήριο είναι τεντωμένο από την φυσική του κατάσταση κατά m_2g/k οι αντίστοιχες αποστάσεις των σφαιριδίων από το C κατ΄αναλογία με τις προηγούμενες σχέσεις θα είναι:

$$L_1 + x_{1,0} = \frac{m_2(L + m_2g/k)}{m_1 + m_2} \quad \text{και} \quad L_2 + x_{2,0} = \frac{m_1(L + m_2g/k)}{m_1 + m_2} \tag{11}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (10) και (11) έχουμε:

$$\frac{m_2 L}{m_1+m_2}+x_{1,0}=\frac{m_2(L+m_2 g/k)}{m_1+m_2} \Rightarrow x_{1,0}=\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\frac{m_2 g}{k} \tag{12}$$

και

$$\frac{m_2 L}{m_1+m_2}+x_{2,0}=\frac{m_1(L+m_2 g/k)}{m_1+m_2} \Rightarrow x_{2,0}=\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\frac{m_2 g}{k} \tag{13}$$

Οι σχέσεις (9) με βάση τις (12) και (13) γράφονται:

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= -\frac{m_2 L}{m_1+m_2}-\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\frac{m_2 g}{k}\text{συνωt} \\ x'_2 &= \frac{m_1 L}{m_1+m_2}+\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\frac{m_2 g}{k}\text{συνωt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2}\left(L+\frac{m_2 g}{k}\text{συνωt}\right) \\ x'_2 &= \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(L+\frac{m_2 g}{k}\text{συνωt}\right) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Οι σχέσεις (14) αποτελουν τις εξισώσεις κίνησης των σφαιριδίων στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας τους. Αν $\vec{X}_C$ είναι η μετατόπιση του κέντρου μάζας C την χρονική στιγμή t στο σύστημα αναφοράς του εδάφους, τότε οι αντίστοιχες αλγεβρικές τιμές των μετατοπίσεων $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$ των δύο σφαιριδίων θα είναι:

$$X_1 = x'_1 + X_C \overset{(19)}{\Rightarrow} X_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\left(L+\frac{m_2 g}{k}\text{συνωt}\right)+\frac{gt^2}{2}$$

και

$$X_2 = x'_2 + X_C \overset{(19)}{\Rightarrow} X_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left(L+\frac{m_2 g}{k}\text{συνωt}\right)+\frac{gt^2}{2}$$

ii) Η απόσταση S(t) των δύο σφαιριδίων την χρονική στιγμή t είναι:

$$S(t)=|x'_1|+x'_2 \overset{(14)}{\Rightarrow} S(t)=\frac{m_2}{m_1+m_2}\left(L+\frac{m_2 g}{k}\text{συνωt}\right)+$$

$$+\frac{m_1}{m_1+m_2}\left(L+\frac{m_2 g}{k}\text{συνωt}\right) \Rightarrow S(t)=L+\frac{m_2 g}{k}\text{συνωt}$$

P.M. fysikos

Άσκηση 8η **Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 του σχήματος (8) έχουν αντί στοιχες μάζες m_1, m_2 και είναι στερεωμένα στις άκρες ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k, το οποίο κρατείται συσπειρωμένο κατά α από την φυσική του κατάσταση, με τη βοήθεια νήματος. Κάποια στιγμή που θεωρείται ως αρχή του χρόνου κόβουμε το νήμα. Να δείξετε ότι κάθε σώμα εκτελεί περιοδική κίνηση πάνω στο λείο οριζόντιο επίπε δο με την ίδια περίοδο, της οποίας να προσδιορίσετε την τιμή.**

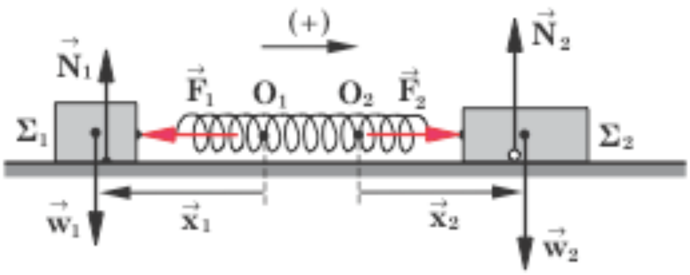
ΛΥΣΗ: **i)** Εξετάζουμε το σύστημα κατά μια στυχαία χρονική στιγμή t που τα διανύσματα θέσεως των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 ως προς τις αρχικές τους θέσεις O_1, O_2 είναι $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ αντιστοίχως. Την στιγμή αυτή το ελατήριο είναι συσπειρωμένο κατά $\alpha-x_2+x_1$ όπου x_1, x_2 οι αλγεβρικές τιμές των διανυσμάτων $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$. Εφαρμόζοντας για τα σώματα τον δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα παίρνου με τις σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} m_1(d^2x_1/dt^2) &= F_1 \\ m_2(d^2x_2/dt^2) &= F_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} m_1(d^2x_1/dt^2) &= -k(\alpha - x_2 + x_1) \\ m_2(d^2x_2/dt^2) &= k(\alpha - x_2 + x_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} d^2x_1/dt^2 &= -k(\alpha - x_2 + x_1)/m_1 \\ d^2x_2/dt^2 &= k(\alpha - x_2 + x_1)/m_2 \end{aligned}\right\} \overset{(-)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{d^2x_2}{dt^2} = -k\alpha\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) - k(x_1 - x_2)\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{d^2(x_1 - x_2)}{dt^2} + \frac{k\alpha}{\mu}(x_1 - x_2) = -\frac{k\alpha}{\mu} \qquad (1)$$



Σχήμα 8

όπου μ η λεγόμενη ανηγμένη μάζα των δύο σωμάτων για την οποία ισχύει η σχέση $1/\mu=1/m_1+1/m_2$. Θέτοντας $k/\mu=\omega^2$ και $x_1-x_2=y$ η (1) μετασχηματίζεται σε μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές, που έχει τη μορφή:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = -\frac{k\alpha}{\mu} \qquad (2)$$

Η (2) δέχεται λύση της μορφής:

$$\mathbf{y = -\alpha + C_1 \eta\mu\omega t + C_2 \sigma\upsilon\nu\omega t \quad \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = -\alpha + C_1 \eta\mu\omega t + C_2 \sigma\upsilon\nu\omega t} \tag{3}$$

όπου C_1, C_2 σταθερές ολοκλήρωσης που θα προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες κίνησης των δύο σωμάτων. Παραγωγίζοντας την σχέση (3) ως προς τον χρόνο έχουμε:

$$\mathbf{\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} = \omega C_1 \sigma\upsilon\nu\omega t - \omega C_2 \eta\mu\omega t} \tag{4}$$

Όμως για t=0 είναι $x_1=x_2=0$ και $dx_1/dt=dx_2/dt=0$, οπότε αυτή τη στιγμή οι σχέσεις (3) και (4) δίνουν:

$$\mathbf{\left.\begin{aligned} 0 &= -\alpha + C_1 0 + C_2 \\ 0 &= \omega C_1 - C_2 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} C_2 &= \alpha \\ C_1 &= 0 \end{aligned}\right\}}$$

Έτσι οι σχέσεις (3) και (4) παίρνουν την τελική τους μορφή:

$$\mathbf{x_1 - x_2 = -\alpha + \alpha\sigma\upsilon\nu\omega t = \alpha(\sigma\upsilon\nu\omega t - 1)} \tag{5}$$

και

$$\mathbf{dx_1/dt - dx_2/dt = -\alpha\omega\eta\mu\omega t} \tag{6}$$

Εξάλλου η ορμή του συστήματος των δύο σωμάτων διατηρείται σταθερή στην διάρκεια της κίνησής τους και ίση με μηδέν, οπότε θα ισχύει:

$$\mathbf{m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{m_1}{m_2}\frac{dx_1}{dt}}$$

Έτσι η σχέση (6) γράφεται:

$$\mathbf{\frac{dx_1}{dt} + \frac{m_1}{m_2}\frac{dx_1}{dt} = -\alpha\omega\eta\mu\omega t \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right) dx_1 = -\alpha\omega\eta\mu\omega t\, dt \quad \Rightarrow}$$

$$\mathbf{dx_1 = -\frac{\alpha\omega m_2}{m_1 + m_2}\eta\mu\omega t\, dt} \tag{7}$$

Ολοκληρώνοντας την (7) παίρνουμε την σχέση:

$$\mathbf{x_1 = \left(\frac{\alpha m_2}{m_1 + m_2}\right)\sigma\upsilon\nu\omega t + C} \tag{8}$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης C θα προκύψει από το γεγονός ότι για t=0 είναι $x_1=0$, οπότε η (8) δίνει:

$$\mathbf{0 = \frac{\alpha m_2}{m_1 + m_2} + C \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{\alpha m_2}{m_1 + m_2}}$$

Η τελική λοιπόν μορφή της (8) είναι:

$$\mathbf{x_1} = \left(\frac{\alpha \mathbf{m_2}}{\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}}\right)\sigma\upsilon\nu\omega t - \frac{\alpha \mathbf{m_2}}{\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}} \Rightarrow \mathbf{x_1} = \frac{\alpha \mathbf{m_2}}{\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}}(\sigma\upsilon\nu\omega t - 1) \qquad (9)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5) και (9) παίρνουμε:

$$\frac{\alpha \mathbf{m_2}}{\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}}(\sigma\upsilon\nu\omega t - 1) - \mathbf{x_2} = \alpha(\sigma\upsilon\nu\omega t - 1) \Rightarrow$$

$$\alpha\left(\frac{\mathbf{m_2}}{\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}} - 1\right)\sigma\upsilon\nu\omega t + \alpha\left(1 - \frac{\mathbf{m_2}}{\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}}\right) = \mathbf{x_2} \Rightarrow$$

$$\frac{-\alpha \mathbf{m_1}}{\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}}\sigma\upsilon\nu\omega t + \frac{\alpha \mathbf{m_1}}{\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}} = \mathbf{x_2} \Rightarrow$$

$$\mathbf{x_2} = \frac{\alpha \mathbf{m_1}}{\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}}(1 - \sigma\upsilon\nu\omega t) \qquad (10)$$

Παρατηρούμε από τις σχέσεις (9) και (10) ότι οι μετατοπίσεις των σωμάτων από τις αρχικές τους θέσεις είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου, με κοινή περίοδο Τ, η οποία υπολογίζεται από την σχέση:

$$\mathbf{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mathbf{k}/\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\mathbf{k}}} \Rightarrow \mathbf{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathbf{m_1 m_2}}{\mathbf{k}(\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2})}}$$

P.M. fysikos